ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. А. Бакланов

Новосибирск, 2023

Усиленный закон больших чисел

Определение

Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет *усиленному закону больших чисел*, если в (3.3) сходимость имеет место с вероятностью 1.

Всюду далее $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ — возрастающая последовательность положительных чисел: $b_n > 0$, $b_n \uparrow \infty$.

Усиленный закон больших чисел

Для доказательства нижеследующих теорем нам понадобятся два известных утверждения из математического анализа.

Лемма 3.10 (Тёплица)

Пусть $\{a_j\}_{j\geqslant 1}$ *— последовательность неотрицательных чисел такая, что* $b_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Пусть также* $\{x_j\}_{j\geqslant 1}$ *— числовая последовательность такая, что* $x_n \to x$ *при* $n \to \infty$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \to x. \tag{3.18}$$

В частности, если $x_n \to x$, *то*

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \to x. \tag{3.19}$$

Усиленный закон больших чисел

Доказательство

Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - x| < \varepsilon/2$ для всех $n \geqslant N$. Так как $b_n \to \infty$, то можно выбрать $n_1 > N$ так, что для любого $n > n_1$

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{N} a_j |x_j - x| < \varepsilon/2.$$

Усиленный закон больших чисел

Доказательство

Тогда для всех $n > n_1$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - x\right| &\leqslant \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} a_j |x_j - x| = \\
&= \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{N} a_j |x_j - x| + \frac{1}{b_n}\sum_{j=N+1}^{n} a_j |x_j - x| \leqslant \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{b_n - b_N}{b_n} \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}
$$

$\square$

Лемма 3.11 (**Кронекера**)

Пусть $\{c_j\}_{j\geqslant 1}$ *— числовая последовательность такая, что ряд* $\sum\limits_{j\geqslant 1} c_j/b_j$ *сходится. Тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} c_j \to 0.$$

Доказательство

Обозначим $z_n = \sum\limits_{j \geqslant n} c_j/b_j$. Так как ряд $\sum\limits_{j \geqslant 1} c_j/b_j$ сходится, то $z_n \to 0$ при $n \to \infty$. Заметим, что $z_j - z_{j+1} = c_j/b_j$, и, значит, $c_j = b_j(z_j - z_{j+1})$. Положим $a_j = b_j - b_{j-1}$, $b_0 = 0$. Используя *преобразование Абеля* (суммирование по частям), получим

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_j &= \sum_{j=1}^{n} b_j(z_j - z_{j+1}) = \sum_{j=1}^{n} b_j z_j - \sum_{j=1}^{n+1} b_{j-1} z_j = \\
&= \sum_{j=1}^{n} (b_j - b_{j-1}) z_j - b_n z_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_j z_j - b_n z_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Доказательство

Тогда в силу (3.18)

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} c_j = \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} a_j z_j - z_{n+1} \to 0.$$

$\square$

Следствие 3.2

Если ряд $\sum\limits_{j\geqslant 1} X_j/b_j$ *сходится с вероятностью 1, то имеет место усиленный закон больших чисел*

$$\frac{S_n}{b_n} \to 0 \text{ п. н.}$$

Доказательство

Пусть

$$A = \left\{\omega : \sum_{j\geqslant 1} \frac{X_j(\omega)}{b_j} \text{ сходится}\right\}, \quad B = \left\{\omega : \frac{S_n(\omega)}{b_n} \to 0 \text{ при } n \to \infty\right\}.$$

По условию $\mathsf{P}(A) = 1$. По лемме Кронекера $A \subseteq B$, тогда $1 = \mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(B) \leqslant 1$, и, следовательно, $\mathsf{P}(B) = 1$. □

Усиленный закон больших чисел

Теорема 3.10 (Колмогорова)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых случайных величин и пусть* $\mathsf{D}X_n < \infty$, $n \geqslant 1$. *Если* $\sum\limits_{j\geqslant 1} \mathsf{D}X_j/b_j^2 < \infty$, *то*

$$\frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{b_n} \to 0 \text{ п. н.}$$

Доказательство

Так как

$$\mathsf{E}\left(\frac{X_j - \mathsf{E}X_j}{b_j}\right) = 0, \quad \sum_{j \geqslant 1} \mathsf{D}\left(\frac{X_j - \mathsf{E}X_j}{b_j}\right) = \sum_{j \geqslant 1} \frac{\mathsf{D}X_j}{b_j^2} < \infty,$$

то в силу теоремы 3.6 ряд $\sum\limits_{j \geqslant 1} (X_j - \mathsf{E}X_j)/b_j$ сходится с вероятностью 1. Тогда по следствию 3.2

$$\frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{b_n} \to 0 \text{ п. н.}$$

□

Следствие 3.3

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с* $\mathrm{D}X_1 < \infty$.

Тогда $\dfrac{S_n}{n} \to \mathsf{E}X_1$ *п. н.*

Усиленный закон больших чисел

В следующей теореме приводятся достаточные условия выполнения усиленного закона больших чисел для произвольных независимых случайных величин.
Напомним, что $X^{[\varepsilon]} = XI(|X| < \varepsilon)$.

Усиленный закон больших чисел

Теорема 3.11

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых случайных величин и пусть для некоторого* $\varepsilon > 0$ *выполнены следующие условия*

$$\sum_{j\geqslant 1} \mathsf{P}(|X_j| \geqslant \varepsilon b_j) < \infty, \tag{3.20}$$

$$\sum_{j\geqslant 1} \mathsf{D} X_j^{[\varepsilon b_j]} / b_j^2 < \infty, \tag{3.21}$$

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E} X_j^{[\varepsilon b_j]} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.22}$$

Тогда

$$\frac{S_n}{b_n} \to 0 \text{ п. н.}$$

Доказательство

Обозначим $Y_j = X_j / b_j$. Тогда

$$Y_j^{[\varepsilon]} = \left(\frac{X_j}{b_j}\right)^{[\varepsilon]} = \frac{X_j}{b_j} I(|X_j| < \varepsilon b_j) = \frac{X_j^{[\varepsilon b_j]}}{b_j}.$$

По условию $\sum\limits_{j\geqslant 1} \mathsf{P}(|Y_j| \geqslant \varepsilon) < \infty$, $\sum\limits_{j\geqslant 1} \mathsf{D} Y_j^{[\varepsilon]} < \infty$. В силу теоремы 3.7 ряд $\sum\limits_{j\geqslant 1} (Y_j - \mathsf{E} Y_j^{[\varepsilon]})$ сходится с вероятностью 1. Тогда по следствию 3.2

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mathsf{E} X_j^{[\varepsilon b_j]}) \to 0 \text{ п. н.}$$

Усиленный закон больших чисел

Доказательство

Таким образом,

$$\frac{S_n}{b_n} = \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathsf{E}X_j^{[\varepsilon b_j]}) + \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}X_j^{[\varepsilon b_j]} \to 0 \text{ п. н.}$$

$\square$

Усиленный закон больших чисел

В теореме 3.12 приводятся необходимые условия выполнения усиленного закона больших чисел.

Теорема 3.12

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых случайных величин и пусть* $S_n/b_n \to 0$ *п. н. Тогда для всех* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j\geqslant 1} \mathsf{P}(|X_j| \geqslant \varepsilon b_j) < \infty. \tag{3.23}$$

Доказательство

Так как $S_n/b_n \to 0$ п. н., $S_{n-1}/b_{n-1} \to 0$ п. н. и $0 \leqslant b_{n-1}/b_n \leqslant 1$, то

$$\frac{X_n}{b_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{b_n} = \frac{S_n}{b_n} - \frac{b_{n-1}}{b_n}\frac{S_{n-1}}{b_{n-1}} \to 0 \text{ п. н.}$$

Отсюда в силу леммы 3.7 (ii) следует (3.23). □

Замечание

В теореме 3.12 вместо условия $0 < b_n \uparrow \infty$ достаточно потребовать, чтобы
$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = O(1).$$

Теорема 3.13 (усиленный закон больших чисел Марцинкевича — Зигмунда)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин,* $0 < \alpha < 2$. *Для сходимости*

$$\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \to 0 \text{ п. н.}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mathsf{E}|X_1|^\alpha < \infty$ *и* $\mathsf{E}X_1 = 0$ *в случае* $1 \leqslant \alpha < 2$.

Доказательство

Достаточность. В теореме 3.11 положим $\varepsilon = 1$, $b_n = n^{1/\alpha}$. Так как случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ одинаково распределены, то из леммы 3.3 получаем:

$$\sum_{j \geqslant 1} \mathsf{P}(|X_j| \geqslant j^{1/\alpha}) = \sum_{j \geqslant 1} \mathsf{P}(|X_1|^\alpha \geqslant j) \leqslant \mathsf{E}|X_1|^\alpha < \infty,$$

т. е. условие (3.20) выполнено.

Доказательство

Покажем, что выполнено условие (3.21).

$$\begin{aligned}
\mathsf{D} X_1^{[j^{1/\alpha}]} &\leqslant \mathsf{E}(X_1^{[j^{1/\alpha}]})^2 = \mathsf{E}(X_1^2 I(|X_1| < j^{1/\alpha})) = \mathsf{E}(X_1^2; |X_1| < j^{1/\alpha}) = \\
&= \sum_{k=1}^{j} \mathsf{E}(|X_1|^\alpha |X_1|^{2-\alpha}; (k-1)^{1/\alpha} \leqslant |X_1| < k^{1/\alpha}) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{j} k^{(2-\alpha)/\alpha} \mathsf{E}(|X_1|^\alpha; (k-1)^{1/\alpha} \leqslant |X_1| < k^{1/\alpha}).
\end{aligned}$$

Обозначим $m_k = \mathsf{E}(|X_1|^\alpha; (k-1)^{1/\alpha} \leqslant |X_1| < k^{1/\alpha})$. Тогда

$$\sum_{j \geqslant 1} \frac{\mathsf{D} X_j^{[j^{1/\alpha}]}}{j^{2/\alpha}} \leqslant \sum_{j \geqslant 1} \sum_{k=1}^{j} \frac{m_k k^{2/\alpha - 1}}{j^{2/\alpha}} = \sum_{k \geqslant 1} m_k k^{2/\alpha - 1} \Bigl(\sum_{j \geqslant k} \frac{1}{j^{2/\alpha}} \Bigr).$$

Усиленный закон больших чисел

Доказательство

Пусть $p > 1$, тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geqslant k}\frac{1}{j^p} &= \frac{1}{k^p} + \sum_{j\geqslant k+1}\int\limits_{j-1}^{j}\frac{dx}{j^p} \leqslant \frac{1}{k^p} + \sum_{j\geqslant k+1}\int\limits_{j-1}^{j}\frac{dx}{x^p} = \\
&= \frac{1}{k^p} - \frac{k^{-p+1}}{1-p} = \frac{1}{k^{p-1}}\Big(\frac{1}{k} + \frac{1}{p-1}\Big) \leqslant \\
&\leqslant \frac{p}{p-1}k^{1-p} = c(p)k^{1-p}.
\end{aligned}$$

Отсюда при $p = 2/\alpha > 1$ получаем:

$$\sum_{j\geqslant k}\frac{1}{j^{2/\alpha}} \leqslant c(\alpha)k^{1-2/\alpha},$$

Усиленный закон больших чисел

Доказательство

и, следовательно,

$$\sum_{j\geqslant 1}\frac{\mathsf{D}X_j^{[j^{1/\alpha}]}}{j^{2/\alpha}}\leqslant c(\alpha)\sum_{k\geqslant 1}m_k=c(\alpha)\mathsf{E}|X_1|^{\alpha}<\infty,$$

откуда получаем (3.21).

Доказательство

Докажем, что

$$\sum_{j\geqslant 1}\frac{\mathsf{E}X_1^{[j^{1/\alpha}]}}{j^{1/\alpha}}<\infty, \tag{3.24}$$

откуда в силу леммы Кронекера 3.11 будет следовать, что

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}X_1^{[j^{1/\alpha}]}\to 0, \quad n\to\infty. \tag{3.25}$$

Доказательство

Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}X_1^{[j^{1/\alpha}]} &\leqslant \mathsf{E}|X_1^{[j^{1/\alpha}]}| = \mathsf{E}(|X_1|; |X_1| < j^{1/\alpha}) = \\
&= \mathsf{E}(|X_1|^{\alpha}|X_1|^{1-\alpha}; |X_1| < j^{1/\alpha}) = \\
&= \sum_{k=1}^{j} \mathsf{E}(|X_1|^{\alpha}|X_1|^{1-\alpha}; (k-1)^{1/\alpha} \leqslant |X_1| < k^{1/\alpha}) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{j} k^{1/\alpha - 1}\mathsf{E}(|X_1|^{\alpha}; (k-1)^{1/\alpha} \leqslant |X_1| < k^{1/\alpha}).
\end{aligned}
$$

Доказательство

Отсюда получаем:

$$\sum_{j\geqslant 1}\frac{\mathsf{E}X_1^{[j^{1/\alpha}]}}{j^{1/\alpha}} \leqslant \sum_{j\geqslant 1}\sum_{k=1}^{j}\frac{m_k k^{1/\alpha-1}}{j^{1/\alpha}} = \sum_{k\geqslant 1} m_k k^{1/\alpha-1}\Big(\sum_{j\geqslant k}\frac{1}{j^{1/\alpha}}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant c(\alpha)\sum_{k\geqslant 1} m_k = c(\alpha)\mathsf{E}|X_1|^{\alpha} < \infty.$$

Усиленный закон больших чисел

Доказательство

Пусть теперь $1 < \alpha < 2$. Тогда

$$0 = \mathsf{E}X_1 = \left(\mathsf{E}X_1 - \mathsf{E}X_1^{[j^{1/\alpha}]}\right) + \mathsf{E}X_1^{[j^{1/\alpha}]} = \mathsf{E}\left(X_1 - X_1^{[j^{1/\alpha}]}\right) + \mathsf{E}X_1^{[j^{1/\alpha}]},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
\left|\mathsf{E}X_1^{[j^{1/\alpha}]}\right| &= \left|\mathsf{E}\left(X_1 - X_1^{[j^{1/\alpha}]}\right)\right| \leqslant \mathsf{E}\left|\left(X_1 - X_1^{[j^{1/\alpha}]}\right)\right| = \\
&= \mathsf{E}(|X_1| I(|X_1| \geqslant j^{1/\alpha})) = \mathsf{E}(|X_1|; |X_1| \geqslant j^{1/\alpha}) = \\
&= \sum_{k \geqslant j} \mathsf{E}(|X_1|^\alpha |X_1|^{1-\alpha}; k^{1/\alpha} \leqslant |X_1| < (k+1)^{1/\alpha}) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k \geqslant j} k^{1/\alpha - 1} \mathsf{E}(|X_1|^\alpha; k^{1/\alpha} \leqslant |X_1| < (k+1)^{1/\alpha}).
\end{aligned}$$

Усиленный закон больших чисел

Доказательство

Отсюда

$$\sum_{j\geqslant 1}\frac{\left|\mathsf{E}X_1^{[j^{1/\alpha}]}\right|}{j^{1/\alpha}}\leqslant\sum_{j\geqslant 1}\sum_{k\geqslant j}\frac{m_{k+1}k^{1/\alpha-1}}{j^{1/\alpha}}=\sum_{k\geqslant 1}m_{k+1}k^{1/\alpha-1}\Big(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j^{1/\alpha}}\Big).$$

Усиленный закон больших чисел

Доказательство

Пусть $0 < p < 1$, тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^p} &= 1 + \sum_{j=2}^{k} \int\limits_{j-1}^{j} \frac{dx}{j^p} \leqslant 1 + \sum_{j=2}^{k} \int\limits_{j-1}^{j} \frac{dx}{x^p} = \\
&= 1 + \int\limits_{1}^{k} \frac{dx}{x^p} = -\frac{p}{1-p} + \frac{k^{1-p}}{1-p} \leqslant \\
&\leqslant \frac{k^{1-p}}{1-p} = c(p)k^{1-p}.
\end{aligned}$$

Доказательство

Таким образом, при $\alpha > 1$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^{1/\alpha}} \leqslant c(\alpha) k^{1-1/\alpha},$$

и, следовательно,

$$\sum_{j \geqslant 1} \frac{\left| \mathsf{E} X_1^{[j^{1/\alpha}]} \right|}{j^{1/\alpha}} \leqslant c(\alpha) \sum_{k \geqslant 1} m_{k+1} \leqslant c(\alpha) \mathsf{E}|X_1|^\alpha < \infty.$$

Итак, условие (3.24), а вместе с ним и (3.25), выполнено при всех $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$.

Доказательство

Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$\mathsf{E}X_1^{[j]} = \mathsf{E}(X_1 I(|X_1| < j)) \to \mathsf{E}X_1 = 0, \quad j \to \infty.$$

Следовательно, в силу (3.19) при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}X_1^{[j]} \to 0,$$

т. е. условие (3.25) выполнено и при $\alpha = 1$. Таким образом, из теоремы 3.11 получаем:

$$\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \to 0 \text{ п. н.}$$

Доказательство

Необходимость. Пусть $n^{-1/\alpha}S_n \to 0$ п. н. Полагая $\varepsilon = 1$ в теореме 3.12, из леммы 3.3 получаем:

$$\mathsf{E}|X_1|^\alpha \leqslant 1 + \sum_{j\geqslant 1} \mathsf{P}(|X_1|^\alpha \geqslant j) = 1 + \sum_{j\geqslant 1} \mathsf{P}(|X_j| \geqslant j^{1/\alpha}) < \infty.$$

В случае $0 < \alpha < 1$ теорема доказана.

Доказательство

Пусть $1 \leqslant \alpha < 2$. По только что доказанному математическое ожидание $\mathsf{E}X_1$ существует. Обозначим $a = \mathsf{E}X_1$. Случайные величины $\{X_j - a\}_{j \geqslant 1}$ независимы и одинаково распределены, $\mathsf{E}(X_1 - a) = 0$, $\mathsf{E}|X_1 - a|^\alpha < \infty$. Тогда в силу уже доказанного

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(X_j - a)}{n^{1/\alpha}} = \frac{S_n}{n^{1/\alpha}} - \frac{na}{n^{1/\alpha}} \to 0 \text{ п. н.}$$

и, значит,

$$\frac{na}{n^{1/\alpha}} \to 0.$$

Но это возможно только если $a = 0$, т. е. $\mathsf{E}X_1 = 0$. $\square$

Следствие 3.4 (усиленный закон больших чисел Колмогорова)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин. Для того чтобы существовала такая постоянная a, что

$$\frac{S_n}{n} \to a \text{ п. н.}, \tag{3.26}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\mathsf{E}|X_1| < \infty.$$

Если это условие выполнено, то (3.26) имеет место с $a = \mathsf{E}X_1$.